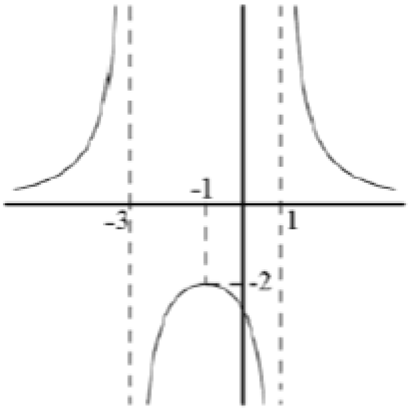
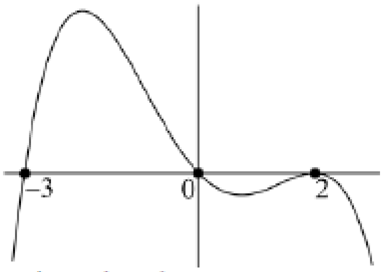
1. [PAU10J5Q3] Determineu el valor dels paràmetres *a, b i c* perquè la gràfica de la funció $f(x) = \frac{a}{x^2+bx+c}$ sigui la següent:



2. [PAU11J1Q6] Sigui $f(x) = x^2 \cdot e^{-ax}$ quan $a \neq 0$.
   a) Calculeu el valor de a perquè aquesta funció tingui un extrem relatiu en el punt d'abscissa $x = 2$.
   b) Quan $a = 2$, classifiqueu-ne els extrems relatius.

3. [PAU1J4Q3] La gràfica corresponent a la derivada de la funció $f(x)$ és la següent:



   a) Expliqueu raonadament quins valors de x corresponen a màxims o mínims relatius de $f(x)$.
   b) Determineu els intervals de creixement i decreixement de la funció $f(x)$.

4. [PAU11S2Q3] Donada la funció $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$.
   a) Determineu ka relació que han de complir els paràmetres *a, b i c* perquè $f(x)$ tingui un extrem relatiu en el punt d'abscissa $x = 1$.
   b) Calculeu el valor del paràmetre *a* perquè hi hagi un punt d'inflexió de la funció $f(x)$ en el punt d'abscissa $x = 0$.
   c) Determineu la relació entre els paràmetres *a, b i c* sabent que la gràfica $f(x)$ talla l'eix *OX* en el punt d'abscissa $x = -2$.
   d) Calculeu el valor dels paràmetres *a, b i c* perquè compleixin les tres propietats anteriors alhora.

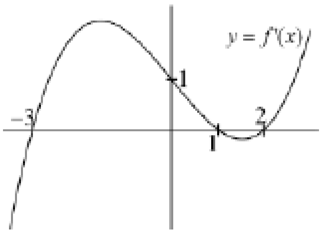
5. [PAU12J3Q2] Donades la recta $y = 3x + b$ i la paràbola $y = x^2$.
   a) Calculeu l'abscissa del punt on la recta tangent a la paràbola és paral·lela a la recta donada.

b) Calculeu el valor del paràmetre *b* perquè la recta sigui tangent a la paràbola.

6. [PAU12S4Q6] Donades la recta $y = ax + 1$ i la paràbola $y = 3x - x^2$.
   a) Calculeu els valors del paràmetre *a* perquè siguin tangents.
   b) Calculeu els punts de tangència.

7. [PAU12S4Q2] Sigui $f(x) = \frac{ax^2}{x+b}$, en què $a \neq 0$.
   a) Determineu si té alguna asímptota vertical , en funció del paràmetre b.
   b) Indiqueu el valor dels paràmetres $a\ i\ b$ perquè la funció $f(x)$ tingui la recta $y = 2x - 4$ com a asímptota obliqua a $+\infty$.

8. [PAU13J4Q6] LA funció $f(x)$ és derivable i passa per l'origen de coordenades. La gràfica de la funció derivada és la que veieu aquí dibuixada, essent $f'(x)$ creixent als intervals $(-\infty, -3]\ i\ [2, +\infty)$.



   a) Trobeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció $f(x)$ en el punt d'abscissa $x = 0$.
   b) Indiqueu les abscisses dels extrems relatius de la funció $f(x)$ i classifiqueu aquests extrems.

9. [PAU13J3Q6] Sigui la funció $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Sabem que la gràfica d'aquesta funció és la recta tangent a la recta $r\colon y = x + 3$ en el punt d'abscissa $x = -1$, i que en el punt d'abscissa $x = 1$ la recta tangent és paral·lela a r. Calculeu els valors dels paràmetres *a, b i c.*

10. [PAU13J5Q4] Per a $x \geq 1$, considereu la funció $f(x) = +\sqrt{x-1}$.
    a) Trobeu l'equació de la recta tangent a la gràfica $f(x)$en el punt d'abscissa igual a 10.
    b) Calculeu l'àrea del recinte limitat per la gràfica $f(x)$, la recta d'equació $x = 5$ i l'eix *OX.*

11. [PAU13S1Q2] De la funció polinòmica $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + 2$ sabem que:
    - Té un extrem relatiu en el punt d'abscissa $x = -3$.
    - La integral definida en l'interval [0,1] val $-\frac{5}{4}$.

    Calculeu el valor dels paràmetres *a i b*.

12. [PAU14J4Q1] Considereu la funció $f(x) = \frac{x+3}{x-2}$.
    a) Calculeu les asímptotes verticals, horitzontals i obliqües de la funció.
    b) Trobeu l'equació de a recta tangent a la gràfica de la funció en aquells punts en què la recta tangent sigui paral·lela a la recta $= -5x + 4$.

13. [PAU14S5Q2] Siguin les funcions $f(x) = \frac{e^{ax}+b}{4}$ i $g(x) = +\sqrt{3x+4}$.
    a) Determineu el domini i el recorregut de la funció g(x).
    b) Calculeu per a quins valors de *a i b* les gràfiques de les dues funcions són tangent (és a dir, tenen la mateixa recta tangent) en el punt d'abscissa $x = 0$.

14. [PAU14S5Q4] Sabem que una funció $f(x)$ té per derivada la funció $f'(x) = (3x-2)^2(x-2)$.
    a) Calculeu els valors de x en què la funció $f(x)$ té un màxim relatiu, un mínim relatiu o un punt d'inflexió, i indiqueu en cada cas de què es tracta.
    b) Determineu la funció $f(x)$sabent que s'anul·la en el punt d'abscissa $x = 2$.

15. [PAU15J4Q2] Sigui la funció $f(x)x^3 - 4x^2 + 4x$.
    a) Calculeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció $f(x)$en el punt d'abscissa $x = 1$.
    b) Calculeu les abscisses dels punts de la gràfica en que hi ha un mínim relatiu, un màxim relatiu o un inflexió.

16. [PAU15S5Q3] Sigui la funció $f(x) = xe^{x-1}$.
    a) Calculeu els màxims relatius, els mínims relatius i els punts d'inflexió de la funció $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$.
    b) Expliqueu raonadament que si $f(x)$és una funció amb la derivada primera contínua en l'interval $[a, b]$ i satisfà $f'(a) > 0 \ \ i \ f'(b) < 0$, aleshores hi ha, com a mínim, un punt de l'interval (a, b) en què la recta tangent a la gràfica de $f(x)$ en aquest mateix punt és horitzontal.

17. [PAU17J1Q3] Sigui la funció $f(x) = \frac{1}{x^2-k}$, en què k és un paràmetre real diferent de 0. Per als diferents valors del paràmetre k.
    a) Calculeu el domini i les asímptotes de la funció.
    b) Calculeu els punts amb un màxim o un mínim relatiu.

18. [PAU18J1Q3] Sigui la funció $f(x) = x^3 - x^2$.
    a) Trobeu l'equació de la recta tangent a la gràfica i que és paral·lela a la recta d'equació $x + 3y = 0$.
    b) Calculeu si n'hi ha, els punts de la gràfica en què la funció presenta un màxim o mínim relatiu o un punt d'inflexió.

19. [PAU18J5Q3] Sigui la funció $f(x) = a \cdot e^{-x^2+bx}$, amb $a \neq 0 \ i \ b \neq 0$.
    a) Calculeu els valors de *a i b* que fan que la funció tingui un extrem relatiu en el punt (1, e).
    b) Per al cas $a = 3 \ \ i \ \ b = 5$, calculeu l'asímptota de funció quan tendeix a $+\infty$.

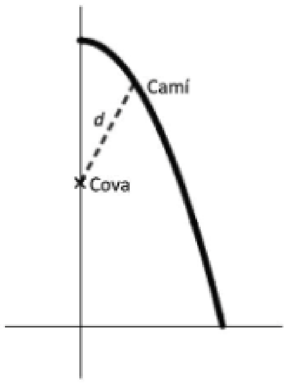
20. [PAU18S3Q1] Considereu la funció polinòmica $f(x) = x^3 - ax^2 + bx + c$.
    a) Calculeu els valors dels paràmetres *a, b i c*, sabent que la funció té un extrem relatiu en el punt d'abscissa $x = 1$ i que la recta tangent a la gràfica de la funció en el punt d'abscissa $x = 0$ és la recta $y = x + 3$.
    b) Per als valors de $a = 2, b = 1 \ i \ c = 3$, calculeu les abscisses dels extrems relatius de la

funció i classifiqueu-los.

21. [PAU19J5Q4] Considereu la funció $f(x) = \frac{2x^3-5x+4}{1-x}$.
   a) Calculeu-ne el domini i estudieu-ne al continuïtat. Té cap asímptota vertical?
   b) Observeu que $f(-2) = -\frac{2}{3}, f(0) = 4\ i\ f(2) = -10$. Raoneu si, a partir d'aquesta informació, podem deduir que l'interval (-2, 0) conté un zero de la funció. Podem deduir-ho per a l'interval (0, 2)? Trobeu un interval determinat per dos enters consecutius que contingui, com a mínim, un zero d'aquesta funció.

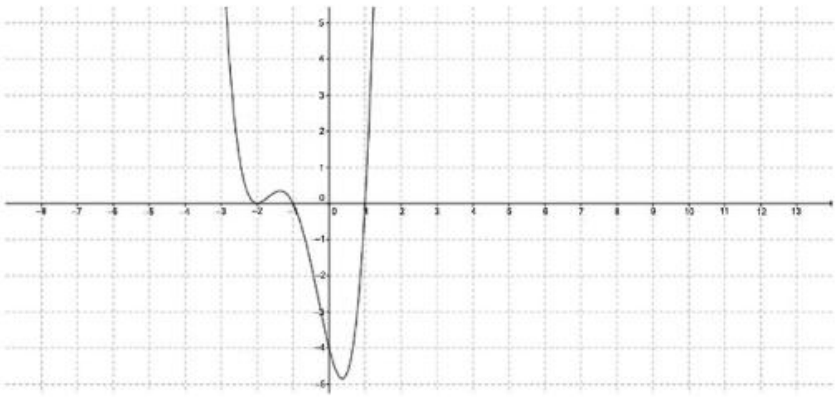
22. [PAU20J1Q4] Considereu la funció $f(x) = \frac{ax^2+b}{x}$, en què a i b són dos paràmetres reals. Calculeu els seus valors de manera que la funció $f(x)$ tingui una asímptota obliqua de pendent 1 i un mínim en el punt de la gràfica d'abscissa $x = 2$.

23. [PAU20J3Q2] S'han trobat unes pintures rupestres en una cova situada en una zona molt pedregosa. Hi ha un camí que voreja parcialment la cova format per l'arc corba $y = 4 - x^2$ d'extrems $(0, 4)$ i $(2, 0)$. La cova està situada en el punt de coordenades $(0, 2)$, tal com es mostra en la figura, i es vol habilitar un accés rectilini d des del camí a la cova que sigui el més curt possible.



   a) Identifiqueu a la gràfica de la figura les coordenades de la cova i del punt del camí des d'on es vol habilitar l'accés. Comproveu que la funció $f(x) = \sqrt{x^4 - 3x^2 + 4}$ calcula l'accés des de cada punt del camí a la cova.
   b) Calculeu les coordenades del punt del camí que queda més a prop de la cova i digueu quina serà la longitud de l'accés d.

24. [PAU20J4Q3] Sigui $f(x)$ una funció derivable la gràfica de la qual passa pel punt $(0, 1)$. La gràfica de la seva derivada, $f'(x)$, és la que es mostra a continuació.



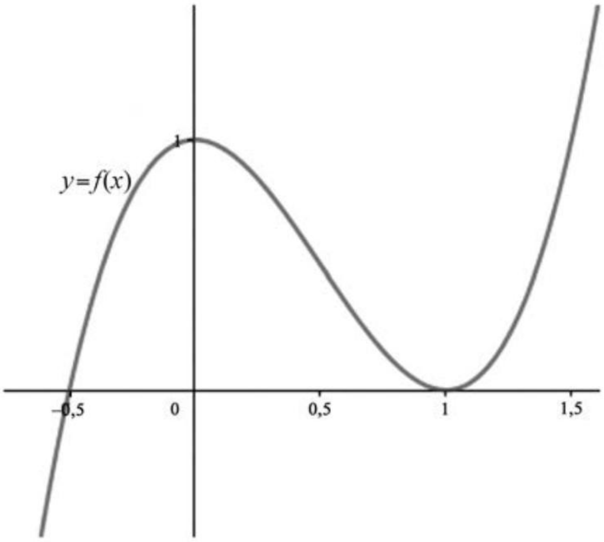
   a) Calculeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció $f(x)$ en el punt de la gràfica d'abscissa $x = 0$.
   b) Trobeu les abscisses dels punts singulars de la funció $f(x)$ i classifiqueu-los.

25. [PAU21J2Q1] Considereu la paràbola $y = 4 - x^2$ i un valor $a > 0$.
    a) Comproveu que l'equació de la recta tangent a la gràfica de la paràbola en el punt d'abscissa $x = a$ és $y = -2ax + a^2 + 4$ i calculeu els punts de tall d'aquesta recta tangent amb els eixos de coordenades.
    b) Calculeu el valor de $a > 0$ perquè l'àrea del triangle determinat per aquesta recta tangent i els eixos de coordenades sigui mínima.

26. [PAU21J2Q6] Considereu la funció $f(x) = e^{x-1} - x - 1$.
    a) Estudieu-ne la continuïtat, els extrems relatius i els intervals de creixement i decreixement.
    b) Demostreu que l'equació $f(x) = 0$ té exactament dues solucions entre $x = -1$ i $x = 3$.

27. [PAU21S1Q2] a)Donada la funció $f(x) = \frac{4}{x}$, calculeu l'equació de la recta tangent a y=f(x) en el punt d'abscissa x=1. Trobeu també l'equació de la recta normal a y=f(x) en aquest mateix punt.
    b. Feu un esbós de les gràfiques de la corba y=f(x) i de la recta 4x+y=8, i calculeu l'àrea delimitada per aquestes dues gràfiques, l'eix de les abscisses i la recta vertical x=3

28. [PAU21S1Q4] En la figura es mostra la gràfica de la funció f(x). Representeu de manera esquemàtica la gràfica de la funció derivada de f(x). Expliqueu el raonament que heu seguit.
    b. Calculeu els valors de a i b perquè la funció $g(x)=ax^3+bx^2+1$ tingui un punt d'inflexió en x=1/2 i la seva derivada en aquest punt sigui -3/2.



29. Considereu la funció $\frac{x^3}{x-2}$:
    a. Estudieu si té punts crítics i, en cas que en tingui, justifiqueu de quin tipus són. Determineu també quins són els intervals de creixement i decreixement de la funció.
    b. Comproveu que l'equació f(x)=0 té una única solució en l'interval (–2, 1).

30. [PAU22J2Q4] Trobeu una funció polinòmica y=g(x) de grau 3 tal que talli l'eix de les ordenades en el punt (0, 5), que la recta tangent a y=g(x) en el punt d'abscissa x= 1 sigui horitzontal i que g''(x) = 2x + 1.
    b. Comproveu que la funció $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 16$ té una arrel ax= 2 i que és estrictament creixent a l'interval (0, 4). Utilitzeu aquesta informació per a calcular l'àrea determinada per la funció f(x), l'eix de les abscisses i les rectes x= 0 i x= 4.

31. [PAU 22J5Q2] Considereu la funció f(x) $=x^3$ i sigui a un nombre real estrictament positiu.
    a. Calculeu l'equació de la recta t tangent a la gràfica de la funció f en el punt d'abscissa x=a. Trobeu el punt de tall de la recta t amb l'eix de les abscisses (en funció de a).
    b. Feu un esbós de la gràfica de la funció f i la recta t. Calculeu el valor de a perquè l'àrea en el primer quadrant limitada per la funció f, la recta t i l'eix de les abscisses sigui 108 u^2

32. La columna de l'esquerra de la taula següent mostra l'esquema d'un programa informàtic que s'ha elaborat per a trobar solucions aproximades d'una equació f(x) = 0 en un interval (a, b), sabent que f(a) · f(b) < 0. La columna de la dreta recull un exemple de funcionament del programa en què es pot veure com actuaria per trobar una solució de l'equació x + ln(x) = 0 entre els valors a= 0,5 i b= 2

Esquema del programa	*Exemple*
1. Escriure «Introduïu un valor a»	L'usuari introdueix $a = 0{,}5$
2. Escriure «Introduïu un valor b»	L'usuari introdueix $b = 2$
3. Escriure «Introduïu una funció $f(x)$»	L'usuari introdueix $f(x) = x + \ln(x)$
4. Calcular $c = (a + b)/2$	El programa calcula la mitjana entre a i b i li assigna el nom $c = (0{,}5 + 2)/2 = 1{,}25$
5. Si $f(a) * f(c) < 0$, aleshores reassignar $b = c$; en cas contrari, reassignar $a = c$	El programa comprova que $f(0{,}5) * f(1{,}25) = (0{,}5 + \ln(0{,}5)) * (1{,}25 + \ln(1{,}25)) < 0$; per tant, reassigna $b = 1{,}25$
6. Repetir els passos 4 i 5 tants cops com faci falta fins que $f(a) - f(b) < 0{,}00000001$	El programa va repetint la comprovació anterior, canviant cada vegada els valors de a o de b: *a* *b* inici 0,5 2 iteració 1 0,5 1,25 iteració 2 0,5 0,875 iteració 3 0,5 0,6875 iteració 4 0,5 0,59375 iteració 5 0,546875 0,59375 iteració 6 0,546875 0,5703125 iteració 7 0,55859375 0,5703125 […]
7. Quan $f(a) - f(b) < 0{,}00000001$, escriure: «La solució de l'equació és c» i aturar el programa	Després d'unes 30 iteracions, el programa escriu: «La solució de l'equació és 0,56714329»

    a. Expliqueu per què aquest programa és capaç de trobar una solució aproximada de l'equació x + ln(x) = 0 entre els valors a= 0,5 i b= 2.
    b. Volem aplicar aquest programa per a trobar les tres arrels de $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ amb valors de a i b diferents. Trobeu justificadament entre quins valors a i b, per a cada arrel, hem d'aplicar el programa per a trobar aproximacions de cadascuna de les tres arrels de la funció.

33. [PAU22S2Q2] Considereu la funció $f(x) = \frac{9}{x^2+x-2}$
    a. Determineu el domini, les possibles asímptotes, els extrems relatius i els intervals de creixement i decreixement de la funció.
    b. Calculeu l'equació general de la recta tangent a la funció f(x) en el punt d'abscissa x=4. Representeu en un mateix gràfic la funció f(x) i la recta tangent

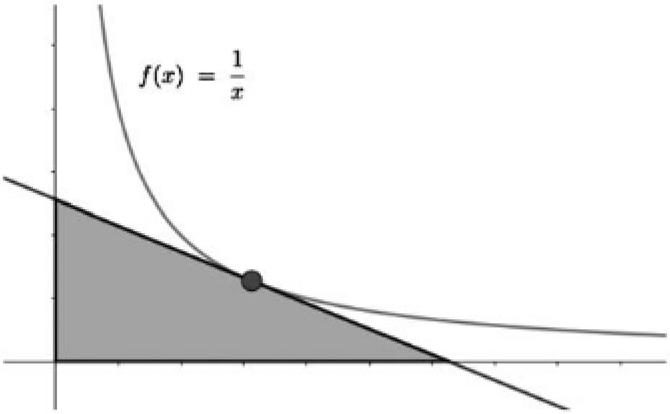
34. [PAU22S2Q4] Considereu la funció $f(x) = \begin{cases} \ln(x), si x \in (0, e) \\ ax + b, si x \in [e, 4) \end{cases}$, on a i b són nombres reals. Trobeu el valor de a i de b per tal que la funció sigui contínua i derivable a l'interval (0, 4).

   b. Calculeu la funció g(x) que satisfà $g'(x) = \frac{x^3}{9x^4+1}$ i que passa pel punt (0, –1).

35. [PAU23J1Q1] Calculeu els coeficients a, b, c i d de la funció f(x) =$ax^3 + bx^2 + cx + d$ si sabem que l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció f en el punt d'inflexió (1, 0) és y= –3x + 3 i que la funció té un extrem relatiu en el punt de la gràfica d'abscissa x= 0.

36. [PAU23J5Q6] Sigui la funció $f(x) = \frac{ax^2+x+b}{x^2+1}$
   a. Calculeu els valors dels paràmetres a i b si sabem que la gràfica de la funció f té un extrem relatiu en x= –1 i passa pel punt P($-2, \frac{13}{5}$)
   b. Per al cas a=b, calculeu i classifiqueu els extrems relatius de la funció.

37. [PAU23S2Q2]Sigui la funció $f(x) = \frac{1}{x}$
   a. Calculeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció f en el punt d'abscissa x=2.
   b. Calculeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció f en el punt d'abscissa x=k, en què k és un nombre real positiu.
   c. Comproveu que, tal com es pot veure en la figura de sota, la recta de l'apartat b determina un triangle d'àrea constant amb els semieixos positius de coordenades. Calculeu aquesta àrea.



38. [PAU23S2Q4]Sigui la funció f(x) definida per $f(x) = -3x + e^{2x^3-1}$
   a. Justifiqueu que f(x) = 2 té una solució en l'interval (–1, 0)
   b. Sigui la funció$h(x) = -3x^2 + e^{2x^3-1}$. Calculeu l'àrea de la regió compresa entre les gràfiques de les funcions f(x) i h(x).

39. [PAU 24J1Q1] Considereu la funció $F(x) = 2\frac{lnx}{x}$, definida per a x > 0.

   a. Estudieu-ne els màxims i els mínims, i les zones de creixement i de decreixement.
   b. Aquesta funció té asímptotes? Feu un esbós de la seva gràfica.
   c. Calculeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de y = f(x) en el punt d'abscissa x = 1.

40. [PAU 24J5Q1] Considereu la funció $f(x) = -2 + 10(x-1)lnx$, definida per a x > 0.

a. Comproveu que f(x) té una arrel a l'interval [1, 1,5] i busqueu un interval d'una dècima de longitud que també contingui aquesta mateixa arrel.

b. Sense calcular els punts crítics, justifiqueu que f(x) és decreixent a l'interval (0, 1) i creixent a (1, +∞). Quins màxims i mínims té aquesta funció?

c. Calculeu $\lim_{x\to 0^+} f(x)\ i\ \lim_{x\to +\infty} f(x)$, i feu un esbós de la gràfica d'aquesta funció.